Determinanten

Datei Nr. 61 012

Stand 6. Oktober 2018

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Zum Inhalt dieses Textes

Eine Möglichkeit Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten zu lösen ist die Verwendung von Determinanten.

In diesem Text wird gezeigt, was Determinanten sind und wie man sie berechnen kann.

Die Anwendung zum Lösen von Gleichungssystemen wird im Text 61013 besprochen.

Inhalt

1 Was sind Determinanten?

Eine Determinante ist ein quadratisch angeordnetes Schema aus „Zahlen“, das nach einer festgelegten Berechnungsvorschrift zu einem Ergebnis führt

Beispiele:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ ist eine <u>zweireihige</u> Determinante. Diese hat den Wert 11.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ ist eine <u>dreireihige</u> Determinante. Diese hat den Wert 28.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ ist eine <u>vierreihige</u> Determinante. Diese hat den Wert 65.

d) $\begin{vmatrix} k & k & 1 \\ 1 & 2k & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. Hier ist das Ergebnis ein Term, und zwar: $= 4k^2 - 2k + 1$

Es gibt unterschiedliche Berechnungmethoden. Das folgt jetzt.

2. Zweireihige Determinanten

Berechnungsvorschrift für zweireihige Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \qquad (1)$$

Vom Podukt der Hauptdiagonalen $\begin{vmatrix} a_1 & \\ & b_2 \end{vmatrix}$ subtrahiert man das Produkt der Nebendiagonalen $\begin{vmatrix} & b_1 \\ a_2 & \end{vmatrix}$.

Beispiele:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$

(b) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot 9 - 3 \cdot (-2) = 45 + 6 = 51$

(c) $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 6 \cdot 12 - 9 \cdot 8 = 72 - 72 = 0$

(d) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - (-2) \cdot 0 = 0$

(e) $\begin{vmatrix} k & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6k - 8$ Eine Determinante kann also auch Variable enthalten.

Zusatzfrage: Wann ist diese Determinante 0? $6k - 8 = 0 \Leftrightarrow 6k = 8 \Leftrightarrow k = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

(f) $\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 12 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot 3 = 6 - 15 = -9$

(g) $\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 10 = 0$

(h) $\begin{vmatrix} 18 & -22 \\ -9 & 11 \end{vmatrix} = 198 - 198 = 0$

Trainingsaufgabe 1

a) Berechne die Werte der folgenden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -2{,}73 \\ \sqrt{3} & \sqrt[5]{2} \end{vmatrix}$$

b) Für welche Werte von t haben diese Determinanten den Wert 0?

$$\begin{vmatrix} t & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3t & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} t & 9 \\ 4 & t \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2t & -8 \\ 4 & t \end{vmatrix}$$

3. Dreireihige Determinanten

Das Ergebnis einer dreireihigen Determinante ist ein komplizierter Term:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

Den merkt sich niemand. Dieser Term kommt bei der Berechnung der Lösung eines Systems aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten vor. Mathematiker haben sich Methoden ausgedacht, wie man das Ergebnis auf einfache Art berechnen kann. Hier werden zwei Verfahren vorgestellt:

1. **Regel von Sarrus**, die der Berechnungsmethode von zweireihigen Determinanten ähnelt.
2. Die **Entwicklung einer Determinante** nach einer Zeile oder einer Spalte. ***Siehe 3.4***

3.1 Die Regel von Sarrus lautet:

Zur Berechnung dreireihiger Determinanten schreibt man die 1. und zweite Spalte noch einmal hinter die Determinante. Damit gibt es drei abwärts führende und drei aufsteigende Diagonalen:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right. \quad \text{und} \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

Aus jeder dieser 6 Diagonalen bildet man ein Produkt. Die drei Produkte aus den abwärts führenden Diagonalen werden addiert, die drei aus den aufsteigenden werden subtrahiert.

Beispiele:

a) $\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right. = 2\cdot2\cdot5 + 3\cdot2\cdot(-1) + 1\cdot3\cdot1 - (-1)\cdot2\cdot1 - 1\cdot2\cdot2 - 5\cdot3\cdot3 = \ldots = -30$

b) $\left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & 3 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 5 \end{array}\right. = 32 + 90 - 10 - (-12) - 100 - 24 = 0$

Determinanten, die Nullen enthalten, lassen sich schnell berechnen:

c) $\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right. = -3 + 16 + 0 - (-30) - (-4) - 0 = 47$

d) $\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 7 & 15 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right. = 0 + 28 + 0 - 90 - 0 - 0 = -62$

Trainingsaufgabe 2

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} k & 3 & 1 \\ 2k & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} k & k & 1 \\ 1 & 2k & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 1-k & k & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 0 & k^2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & k \end{vmatrix}$

3.2 Wann hat eine Dreier-Determinante den Wert Null?

Man benötigt Determinanten bei geometrischen Untersuchungen mit Hilfe der Vektorrechnung.
Dabei ist es sehr oft wichtig, zu erkennen, ob eine Determinante den Wert Null hat.
Dafür gibt es einige Regeln, die sehr hilfreich sind und das Rechnen sparen:

MERKE: **Eine Determinante hat den Wert Null, wenn gilt:**

(N1) Eine Zeile oder Spalte besteht nur aus Nullen.

(N2) Zwei Zeilen oder zwei Spalten sind identisch

(N3) Eine Zeile (Spalte) ist ein Vielfaches einer anderen.

Beweis:

Zu (N1): Beispiele: Die 1. Spalte enthält nur Nullen bzw. die zweite Zeile.

z. B. $\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{matrix} = 0$ oder $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \dots = 0$

Zum Beweis schreibt man sich einfach das Ergebnis nach Sarrus auf und erkennt dann, dass jede absteigende und jede aufsteigende Diagonale eine Null enthält, wodurch alle sechs Produkte 0 werden.

Zu (N2): Wir sehen uns den Fall an, in dem die erste und zweite Spalte identisch sind.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 \end{matrix} = a_1a_2c_3 + a_1a_3c_2 + a_2a_3c_1 - a_2a_3c_1 - a_1a_3c_2 - a_1a_2c_3 = 0$$

Je zwei Produkte heben sich auf, also ist das Ergebnis Null.

Zu (N3): Wir sehen uns den Fall an, in dem die zweite Spalte das k-fache der ersten ist:

$$\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & ka_1 \\ a_2 & ka_2 \\ a_3 & ka_3 \end{matrix} = ka_1a_2c_3 + ka_1a_3c_2 + ka_2a_3c_1 - ka_2a_3c_1 - ka_1a_3c_2 - ka_1a_2c_3 = 0$$

Je zwei Produkte heben sich auf, also ist das Ergebnis Null.

Beispiele: Der Wert dieser Determinanten ist sofort zu erkennen:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$ (e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$ (f) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & 5 & 6 \\ 16 & 4 & -12 \end{vmatrix} = 0$

Begründungen: In (a) besteht die zweite Zeile aus Nullen.
In (b) besteht die 3. Spalte aus Nullen.
In (c) sind die 1. und 3. Spalte identisch.
In (d) die ersten beiden Zeilen.
In (e) ist die 3. Zeile das Doppelte der ersten.
In (f) ist die 3. Spalte das $\left(-\frac{3}{4}\right)$ – fache der 1. Spalte.

3.3 Linearkombinationen von Zeilen oder Spalten

Es gibt eine Rechenoperation ein, die man **Linearkombination** nennt:

Eine Linearkombination ist eine Summe aus Vielfachen von Zeilen bzw. Spalten.

Beispiele:

a) In der folgende Determinante bilden wir die 3. Zeile nach folgender Vorschrift:
Die dritte Zeile soll die Summe aus dem Doppelten der ersten Zeile und dem Dreifachen der zweiten Zeile werden:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2\cdot 2+3\cdot 1 & 2\cdot(-1)+3\cdot 2 & 2\cdot 3+3\cdot 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 18 \end{vmatrix}$$

Der Wert der Determinante ist <u>dann</u> Null:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 18 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{matrix} = 72-28+12-42-32+18=0$$

b) **Die dritte Zeile soll jetzt die Summe aus dem r-fachen der ersten Zeile und dem s-fachen der zweiten Zeile werden:**

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2r+s & -r+2s & 3r+4s \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2r+s & -r+2s \end{matrix}$$

$$= 4(3r+4s)-4(2r+s)+3(-r+2s)-6(2r+s)-8(-r+2s)+(3r+4s)$$

$$= 12r+16s-8r-4s-3r+6s-12r-6s+8r-16s+3r+4s = \boxed{0}$$

MERKE: **Eine Determinante hat den Wert Null, wenn gilt:**
(N4) Eine Zeile (Spalte) ist eine Linearkombination aus den anderen.

Beweis: $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ra+sd & rb+se & rc+sf \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ ra+sd & rb+se \end{matrix}$$

$$= ae(rc+sf)+bf(ra+sd)+cd(rb+se)-ce(ra+sd)-af(rb+se)-bd(rc+sf)=0$$

denn nach dem Ausmultiplizieren heben sich je zwei gleiche Produktterme auf.

Hier wurde das Beispiel untersucht, dass die 3. Zeile eine Linearkombination der beiden anderen Zeilen ist. Jeder andere Fall kann genauso untersucht werden.

Beispiele:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

denn die erste Spalte ist die Summe der zweiten Spalte und der dritten Spalte

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

denn dritte Zeile ist die Summe aus der 1. Zeile und dem Doppelten der zweiten Zeile.